Darstellende Geometrie mit CAD – Dreidimensionales Konstruieren

Klaus Holländer
FH Giessen-Friedberg

Zu den klassischen Werkzeugen der Darstellenden Geometrie, dem Zirkel und Lineal, ist vor etwa zwanzig Jahren das Werkzeug CAD hinzugekommen. CAD erleichtert und beschleunigt das Konstruieren und übertrifft deutlich die Zeichengenauigkeit von Zirkel und Lineal.
Das Flächenmodell (boundary representation) definiert Objekte durch analytische Flächen, beim Volumenmodell (constructive solid geometry) werden Objekte aus Primitivkörpern wie Würfel, Prisma, Zylinder zusammengebaut.

1. Die Rahmenecke

Als Beispiel für ein Volumenmodell wird eine Rahmenecke konstruiert (Abb.1). Es handelt sich um einen Übergang von einem Querschnitt 50/50 cm in einen kleineren Querschnitt 25/25 cm. Der Übergangskörper ist einfach [5, S. 254], aber nicht konvex; er lässt sich in zwei dreiseitige Prismen zerlegen, die an beiden Enden schräg abgeschnitten sind.
Metrische Größen, wie Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumen, können abgefragt werden. Für das Volumen des Übergangsstücks erhält man den Wert V = 72916 cm3. Aus Platzgründen entfällt eine Konstruktionsbeschreibung.

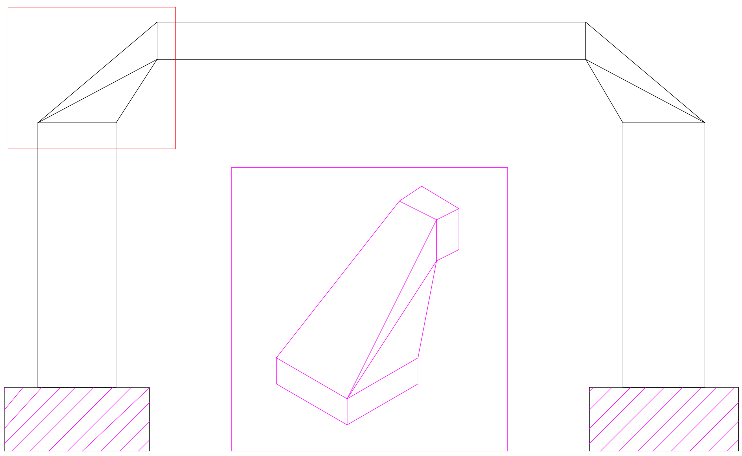


Abb. 1: Rahmenecke

2. Die Fullerene

1985 entdeckten H. Kroto, R. Smalley u.a. im interstellaren Staub das fußballförmige Kohlenstoffmolekül C60 ([7], [9]). Aufgrund der Ähnlichkeit des Bauprinzips dieser Moleküle mit den Kuppeln des amerikanischen Architekten und Erfinders Richard Buckminster Fuller (1895-1993, [4, S. 144], [8, S. 70], [9]) erhielt das Kohlenstoffmolekül C60 den Namen Buckminsterfulleren [9]. Fuller ist durch den Bau von geodätischen Kuppeln berühmt geworden. Sein Hauptwerk war der amerikanische Pavillon auf der Weltausstellung 1967 in Montreal [4, S. 126].

Ein Polyeder ist ein von Vielecken (Polygonen) begrenzter Körper. Polyeder, deren Ober- flächen nur aus Fünf- und Sechsecken bestehen, werden zu Ehren von Fuller Fullerene genannt. Die bekanntesten Fullerene sind das Dodekaeder und das gekappte bzw. abge- stumpfte Ikosaeder. Das Dodekaeder besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken, das gekappte Ikosaeder aus 12 regelmäßigen Fünfecken und 20 regelmäßigen Sechsecken. Im Folgenden wird für ein Fulleren mit n Ecken die Abkürzung Fulleren Cn verwendet, z. B. das Fulleren C60 oder das gekappte Ikosaeder C60 in Abb. 4.

2.1 Das Bauprinzip der Fullerene

Vor etwa. 250 Jahren bewies der geniale Mathematiker Leonhard Euler den nach ihm benannten Polyedersatz ([1], [2], [4], [5]):

$$E + F - K = 2 \qquad (1)$$

(Eckenanzahl E, Flächenanzahl F, Kantenanzahl K)

Sei Fn die Zahl der Flächen (Polygone) mit n Ecken und jede Ecke der Schnittpunkt von genau drei Flächen, z.B. ist F6 die Zahl der Sechsecke. Dann gilt für ein Fulleren Cn:

Zahl der Ecken: $E = (5F5 + 6F6)/3$
Zahl der Flächen: $F = F5 + F6$
Zahl der Kanten: $K = (5F5 + 6F6)/2$ und

$$E + F - K = (5F5 + 6F5)/3 + (F5 + F6) - (5F5 + 6F6)/2 = 1/6\,F5$$

Nach dem eulerschen Polyedersatz (1) muss gelten $1/6\,F5 = 2$. Daraus folgt:

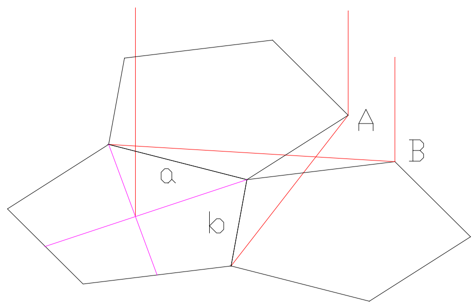
$$F5 = 12 \qquad (2)$$

Das Bauprinzip der Fullerene lautet demnach: Jedes geschlossene Polyeder aus Sechsecken muss genau 12 Fünfecke enthalten. Dieses Prinzip wurde bereits von Euler gefunden.

Aus dem Verschwinden der Eckenzahl F6 in (2) folgt zunächst, dass die Anzahl der Sechsecke beliebig gewählt werden kann. Da der eulersche Polyedersatz aber nur eine notwendige Bedingung beinhaltet, muss sich nicht für jede Zahl $F6 > 0$ ein geschlossenes Polyeder konstruieren lassen [8, S. 65]. Beispielsweise lässt sich für $F6 = 1$ kein geschlos- senes Polyeder konstruieren, jedoch für $F6 = 2$.

2.2 Das Dodekaeder

Als erstes Beispiel eines Flächenmodells wird das Dodekaeder konstruiert. Es besteht aus 12 Fünfecken. Man beginnt mit einem regelmäßiges Fünfeck und spiegelt es an den Kanten a und b (siehe Abb. 2 links). Im nächsten Schritt wird das Fünfeck in die Schräglage gemäß Abbildung 3 links gebracht.
Konstruktionsgedanke: Dreht man die Fünfecke um die Kanten a bzw. b, so beschreiben die Eckpunkte A bzw. B vertikale Kreise, die sich im Punkt C schneiden. Der Schnittpunkt C bestimmt die Schräglage des Fünfecks (siehe Abb. 2 rechts).
Mit dem Befehl Polare Anordnung werden vier weitere Fünfecke ringförmig (polar) angeordnet. Anschließend kopiert man ein Fünfeck und fügt es mit Hilfe des Befehls Ausrichten an zwei vorhandene Fünfecke an und wiederholt den Befehl Polare Anordnung. Zum Schluss wird das noch fehlende Fünfeck ebenfalls mit dem Befehl Ausrichten eingefügt. Damit ist das Dodekaeder komplett (Abb. 3 rechts). Mit dem Befehl Ausrichten können 2D- und 3D- Objekte im Raum positioniert werden. Die Positionierung erfolgt durch die Zuord- nung von drei Objektpunkten zu drei Zielpunkten.



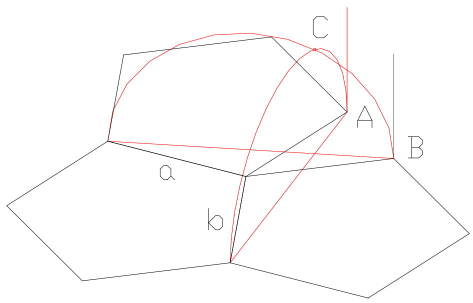
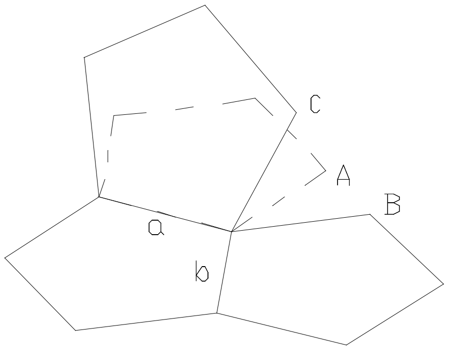


Abb. 2



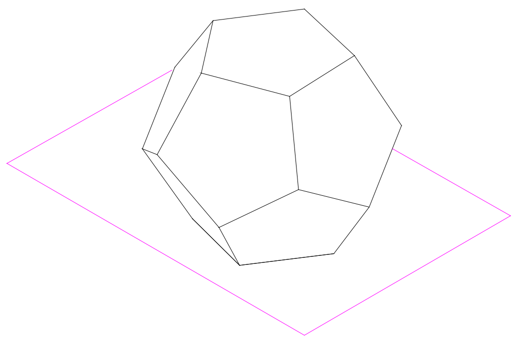


Abb. 3: Dodekaeder C20

2.3 Das gekappte Ikosaeder

Unter den fünf platonischen Körpern ist das Ikosaeder das Polyeder mit der größten Flächenzahl und Symmetrie. Kappt man seine Ecken, so entsteht ein Körper, der fast rund ist. Die Konstruktion des gekappten Ikosaeders verläuft fast genauso wie die des Dodekaeders, mit dem Unterschied, dass die Radien der Kreise etwas anders zu bestimmen sind und abwechselnd Fünf- bzw. Sechsecke polar anzuordnen sind.

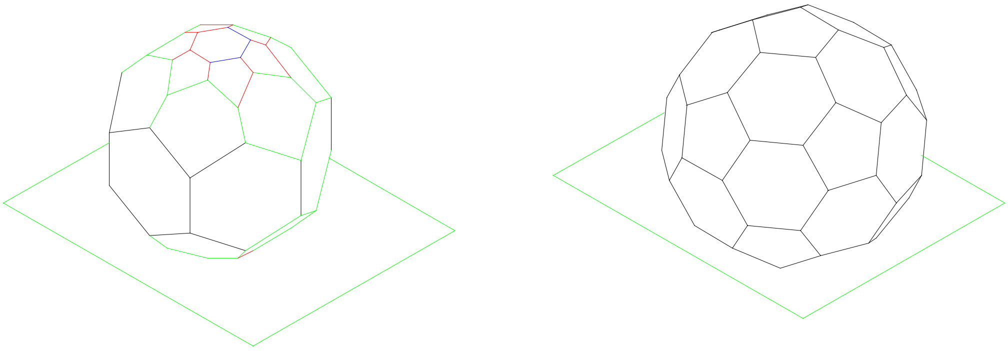


Abb. 4: einfaches Fulleren C60 und gekapptes Ikosaeder C60

2.4 Das Fulleren C70

Es gibt beliebig viele Möglichkeiten, ein Fulleren mit 70 oder mehr Ecken zu konstruieren. Beim Fulleren C70 (Abb. 5) beginnt man mit einem regelmäßigen Fünfeck und ordnet fünf Sechsecke mit Innenwinkeln von ca. 121,4° polar an. Die Konstruktion verläuft sonst wie unter 2.3. Die verschiedenen Fünf- und Sechsecke von C70 sind in Abb. 5 links angegeben.

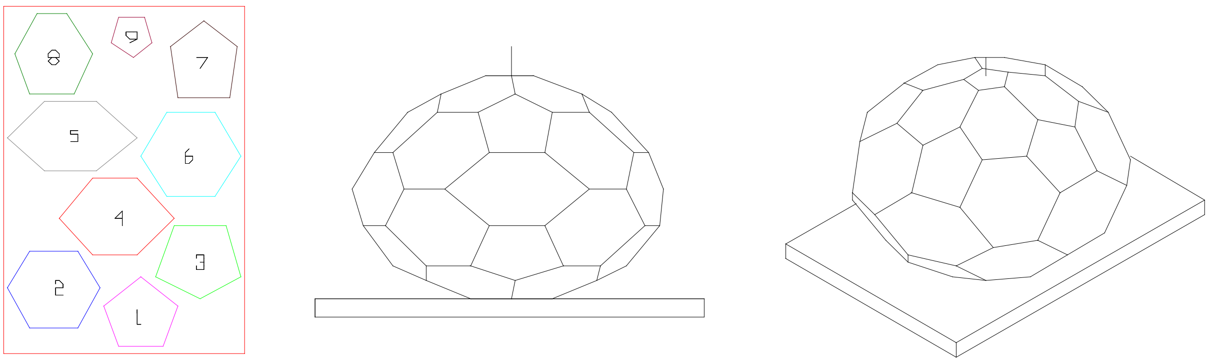
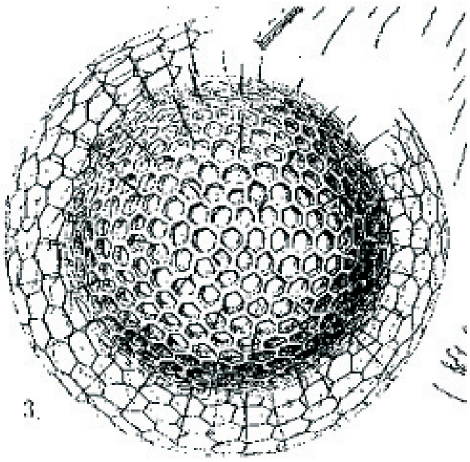


Abb. 5: Fulleren C70

3. Radiolarien

Radiolarien sind einzellige Lebewesen. Die Skelette von manchen Radiolarien sehen wie Fullerene aus, jedoch enthalten ihre Oberflächen neben Fünf- und Sechsecken auch Siebenecke und in seltenen Fällen auch Vierecke und Achtecke ([6, S. 222], [10, S. 708]). Im 19. Jahrhundert hat der Zoologe Ernst Haeckel (1834-1919) zahlreiche Radiolarien studiert und meisterlich dokumentiert. Die Abb. 6 links zeigt eine Radiolarie aus Haeckel‘s „Monograph of the Challenger Radiolaria“ (1873-1876). Die Radiolarie in Abb. 6 rechts von J. F. Carnoy ist dem Werk „On Growth and Form“ des schottischen Zoologen D‘Arcy Wentworth Thomson (1860-1948) entnommen.



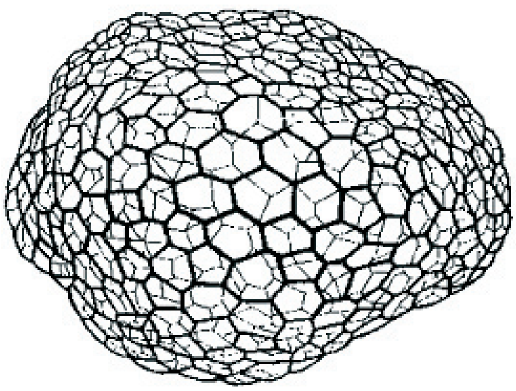


Abb. 6: Radiolarien von E. Haeckel (links) und J. F. Carnoy (rechts)

3.1 Das Bauprinzip der Radiolarien

Ein geschlossenes Polyeder bestehe aus F5 Fünfecken, F6 Sechsecken, F7 Siebenecken und F8 Achtecken und jede Ecke sei der Schnittpunkt von drei Flächen. Dann gilt:

Zahl der Ecken: $E = (5\ F5 + 6\ F6 + 7\ F7 + 8\ F8)/3$
Zahl der Flächen: $F = F5 + F6 + F7 + F8$
Zahl der Kanten: $K = (5\ F5 + 6\ F6 + 7\ F7 + 8\ F8)/2$

$E + F – K = 1/6\ F5 + 0\ F6 – 1/6\ F7 – 1/3\ F8$.

Nach dem Polyedersatz (1) muss gelten: $1/6\ F5 – 1/6\ F7 – 1/3\ F8 = 2$. Daraus folgt:

$$F5 – F7 – 2\ F8 = 12 \quad \text{bzw.} \quad F5 = 12 + F7 + 2\ F8 \qquad (3)$$

Aus dem Verschwinden der Eckenzahl F6 in (3) folgt wie unter 2.1, dass die Zahl der Sechsecke mit Einschränkungen beliebig gewählt werden kann.

Die Radiolarie in Abb. 6 rechts besitzt offensichtlich ein Achteck ($F8 > 0$), für sie gilt (3).
Die Radiolarie in Abbildung 6 links enthält keine Achtecke ($F8 = 0$), für sie gilt (4).

$$F5 – F7 = 12 \quad \text{bzw.} \quad F5 = 12 + F7 \qquad (4)$$

Allgemeiner ist die Formel: $a2\ F2 + a3\ F3 + a4\ F4 + a5\ F5 + a6\ F6 + a7\ F7 + a8\ F8 ... = 12$ mit $an = 6 – n$ für $n = 2, 3, 4...$ [10, S. 737]. Es ist: $a5 = 1$, $a6 = 0$, $a7 = -1$ usw.

In der folgenden Abbildung 7 wird ein geschlossenes Polyeder gezeigt, das aus 14 Fünfecken, 7 Sechsecken und 2 Siebenecken besteht. Zu erkennen ist, dass die Gleichung (4) gültig ist: $F5 = 12 + F7$. Von diesem Polyeder wurde ein Tiffany-Modell angefertigt.

Abb. 7

Anmerkungen

Das bekannteste und vielleicht schönste Fulleren ist das von Archimedes (287-212 v. Chr.) stammende abgestumpfte Ikosaeder; es ist einfach, mehrfach symmetrisch und fast rund. Diese Struktur hat das 1985 entdeckte Kohlenstoffmolekül C60. Bewundernswert ist die Regelmäßigkeit der Skelette von Radiolarien, die den Fullerenen sehr ähnlich sind, jedoch auch Sieben- und Achtecke enthalten.
Die Flächenmodelle und das Volumenmodell wurden mit AutoCAD konstruiert.

Literatur:

[1] Aigner, M. und Ziegler, G. : Das Buch der Beweise, Springer, Berlin Heidelberg 2002.

[2] Beutelspacher, A. und Zschiegner, M.-A.: Diskrete Mathematik für Einsteiger, Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden 2002.

[3] Curl, R. F. und Smalley, R. E. : Fullerene, Spektrum der Wissenschaft 12 / 1991.

[4] Dettmann, J. : Fullerene, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 1994.

[5] Hilbert, D. und Cohn-Vossen, S. : Anschauliche Geometrie, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1932 und 1996.

[6] Hildebrandt, S. und Tromba, A. : Kugel, Kreis und Seifenblasen, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 1996.

[7] Hirsch, A. : Die Chemie der Fullerene, Chemie in unserer Zeit, 28. Jahrg., Nr. 2, 1994.

[8] Krätschmer, W. und Schuster, H. : Von Fuller bis zu den Fullerenen, Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden 1996.

[9] Kroto, H. W., Smalley, R. E. u.a. : C60: Buckminsterfullerene, Nature 1985, 318, 162.

[10] Thompson, D. W. : On Growth and Form, University Press, Cambridge 1948.

Prof. Dr. Klaus Holländer
Wiesenstr. 14
D-35390 Giessen